JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 18, 316–328 (1976)

Majorations pour les polynômes dans certains espaces de Banach. Application à l'approximation

PIERRE GOETGHELUCK

Université de Paris-sud, centre d'Orsay, Département de mathématiques B[t] 425, 91405 Orsay, France

Communicated by Oved Shisha

Received February 24, 1975

INTRODUCTION

On considère ici des espaces $L_w{}^p(\Omega)$ qui sont des espaces L^p sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, borné et lipschitzien, avec un poids assez général. Dans la première partie, la norme des polynômes de $L_w{}^p$ est comparée à leur norme uniforme (les résultats ont été obtenus en collaboration avec M. Y. Dejean). Dans la seconde partie on utilise les majorations obtenues pour montrer que les fonctions analytiques d'un idéal de $L_w{}^p(\Omega)$ sont caractérisées par leur distance aux polynômes. On donne également des propriétés d'approximation polynômiale des fonctions C^∞ et des fonctions du type Gevrey de ces espaces. Les résultats généralisent essentiellement certains théorèmes de Baouendi et Goulaouic [1, 2] mais aussi des résultats plus particuliers [7, 9, 19, 20]. Dans la troisième partie, on montre que l'approximation polynômiale d'une fonction dans $L_w{}^p(\Omega)$ donne aussi une bonne approximation uniforme de la fonction et de ses dérivées. On termine en mettant en relation la vitesse de décroissance de la distance (dans $L_w{}^p(\Omega)$) d'une fonction aux polynômes de degré au plus n et la régularité de cette fonction.

Notations et Définitions

Dans tout cet article, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord lipschitzien. On notera w un poids sur Ω c'est à dire une fonction mesurable, réelle et presque partout strictement positive sur Ω.

Pour $p \geqslant 1$ on pose: $L_w{}^p(\Omega) = \{f \mid f \text{ mesurable et } fw \in L^p(\Omega)\}$ muni de la topologie d'espace de Banach évidente. La norme de cet espace sera notée: $\| \; \|_{p,w}$. La norme de $L^\infty(\Omega)$ sera notée: $\| \; \|$.

Soit B un espace de Banach et A un sous-espace de B. Pour $f \in B$ on note $d_B(f, A) = \inf_{g \in A} \| f - g \|_B$. (Si A est de dimension finie, il existe toujours un élément $h \in A$ tel que $d_B(f, A) = \| f - h \|_B$; voir par exemple [11].)

L'ensemble des suites à décroissance rapide (Resp. exponentielle d'ordre s) sera noté S (Resp. E_s): $(a_n) \in S$ si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(n^p a_n)$ converge. $(a_n) \in E_s$ si et seulement s'il existe $L \geqslant 0$ et $b \in [0, 1[$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $| a_n | \leqslant L b^{n^{1/s}}$.

Fonctions du type Gevrey (pour une étude détaillée voir [1, 2]). On désigne par $G_s(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$) les fonctions de classe Gevrey d'ordre s (Resp. analytiques) sur Ω prolongeables en fonctions de classe Gevrey d'ordre s (Resp. analytiques) sur un voisinage de $\bar{\Omega}$. Soit $\mathscr{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré au plus k, à N variables réelles et à coefficients complexes. Pour $s \geqslant 1$ on pose: $\mathcal{A}_{s,p}(\bar{\Omega}) = \{f \in L^p(\Omega) \mid (d_{L^p(\Omega)}(f, \mathscr{P}_k))_{k \in \mathbb{N}} \in E_s\}$ muni de la topologie limite inductive naturelle.

On rappelle que:

* Ω étant lipschitzien, la définition est indépendante de p. Pour tout p on adoptera la notation: $\mathcal{A}_{s,p}(\bar{\Omega}) = \mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$.

* $G_s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) \subset G_{2s-1}(\bar{\Omega})$ (avec injections continues). En particulier: $\mathcal{A}_1(\bar{\Omega}) = \mathcal{A}(\bar{\Omega})$.

On notera $H_k = \mathscr{P}_k \cap L_w{}^p(\Omega)$ et $\mathfrak{p} = \bigcup_k H_k$. $\mathfrak{p}$ est un idéal engendré par un nombre fini de polynômes notés $Q_1, ..., Q_r$. On désignera par $\mathfrak{q}$ (Resp. $\mathfrak{a}_s$) l'idéal des fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$) engendré par $Q_1, ..., Q_r$. On utilise les notations habituelles pour les multi-indices. On désigne par D_i l'opérateur $\partial/\partial x_i$. Pour α et p dans $\mathbb{N}^N$, $(D^\alpha)^{(p)}$ est l'opérateur obtenu en dérivant formellement $\prod_1^N D^{\alpha_i}$, p_i fois en D_i $(i = 1, ..., N)$.

Soit $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des entiers ν tels que pour tout $x \in \bar{\Omega}$ on puisse trouver $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $| \alpha | \leqslant \nu$ et $m^{(\alpha)}(x) \neq 0$. Si $\mathscr{D}$ n'est pas vide, posons: $d = \inf\{\nu \mid \nu \in \mathscr{D}\}$; on dira alors que sur $\bar{\Omega}$, m a un ordre d'annulation fini et égal à d.

1. Comparaison des normes des polynômes dans $L^\infty(\Omega)$ et dans $L_w{}^p(\Omega)$

1.1. *Le Résultat Principal*

THEOREME 1. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Supposons que w vérifie la propriété suivante:*

(H) *Il existe $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ayant sur $\bar{\Omega}$ un ordre d'annulation fini et égal à d et telle que, presque partout sur Ω: $| m(x)| \leqslant w(x)$.*

Alors il existe deux constantes A et β positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \mathbb{N}^N$ et pour tout $P \in H_n$ on ait

$$\| P^{(j)} \| \leqslant A^{|j|+1}(n + 1)^{\beta+2d+2|j|} \| P \|_{p,w} .$$

1.2. *Démonstration du Théorème* 1

LEMME 1 (Inégalité de Markov; voir [20]). *Il existe une constante C telle que pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ on ait*

$$\| D_i P \| \leqslant C n^2 \| P \|.$$

LEMME 2. *Soit $d_0 \in \mathbb{N}$ et $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Il existe une suite (A_k) de polynômes ($d^\circ A_k \leqslant k$) et une suite $(a_n) \in S$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ vérifiant $|\alpha| \leqslant d_0$, on ait, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\| m^{(\alpha)} - A_k^{(\alpha)} \| \leqslant a_k$.*

Démonstration. Soit $A_k \in \mathscr{P}_k$ tel que $\| m - A_k \| = d_{L^\infty(\Omega)}(m, \mathscr{P}_k)$. D'après [1] la suite $(\| m - A_k \|)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à S. La série $A_0 + \sum_0^\infty (A_{i+1} - A_i)$ converge vers m dans $L^\infty(\Omega)$. Nous avons d'après l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned} \|(A_{i+1} - A_i)^{(\alpha)} \| &\leqslant C^{|\alpha|}(i+1)^{2|\alpha|} \| A_{i+1} - A_i \| \\ &\leqslant 2C^{|\alpha|}(i+1)^{2|\alpha|} d_{L^\infty(\Omega)}(m, \mathscr{P}_i), \end{aligned}$$

et cette dernière expression est le terme général d'une suite de S. Il en résulte que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\|(m - A_k)^{(\alpha)} \| \in S$; on prendra donc

$$a_k = \operatorname*{Max}_{|\alpha| \leqslant d_0} \{\|(m - A_k)^{(\alpha)} \|\}.$$

LEMME 3. *Soit $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $d \in \mathbb{N}$. Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, il existe une constante C_0 telle que pour tout n et pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ on ait*

$$\|(Pm)^{(\alpha)} \| \leqslant \epsilon (n+1)^{-2d} \| P \| + C_0 (n+1)^{2|\alpha|} \| Pm \|.$$

Démonstration. On choisit (A_k) comme dans le lemme 2.

$$\|(Pm)^{(\alpha)} \| \leqslant \|[P(m - A_k)]^{(\alpha)} \| + \|(PA_k)^{(\alpha)} \|.$$

En développant $[P(m - A_k)]^{(\alpha)}$ suivant la formule de Leibniz et en appliquant les Lemmes 1 et 2, il vient

$$\|[P(m - A_k)]^{(\alpha)} \| \leqslant C_1 n^{2|\alpha|} a_k \| P \|,$$

et de même

$$\begin{aligned} \|(PA_k)^{(\alpha)} \| &\leqslant C^{|\alpha|}(n+k)^{2|\alpha|} \| PA_k \| \\ &\leqslant C^{|\alpha|}(n+k)^{2|\alpha|}[\| P(m - A_k)\| + \| Pm \|] \\ &\leqslant C^{|\alpha|}(n+k)^{2|\alpha|} a_k \| P \| + C^{|\alpha|}(n+k)^{2|\alpha|} \| Pm \|. \end{aligned}$$

Au total,

$$\|(Pm)^{(\alpha)} \| \leqslant (n+k)^{2|\alpha|}[C_2 a_k \| P \| + C^{|\alpha|} \| Pm \|.]$$

Remarquons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$C_2(j+1)^{2d}(2j+k_0)\, a_{j+k_0} \leqslant \epsilon.$$

Pour achever la démonstration il suffit alors de prendre $k = n + k_0$.

PROPOSITION 1. *Soit $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ayant sur $\bar{\Omega}$ un ordre d'annulation fini et égal à d. Il existe une constante C_1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in \mathscr{P}_n$, on ait $\| P \| \leqslant C_1(n+1)^{2d} \| Pm \|$.*

Démonstration. Soit $a \in \bar{\Omega}$. Il existe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leqslant d$ et $m^{(\alpha)}(a) \neq 0$. Soit V_a un voisinage ouvert de a tel que, pour tout x dans $F_a = \bar{V}_a \cap \bar{\Omega}$ on ait $|m^{(\alpha)}(x)| \geqslant \frac{1}{2} |m^{(\alpha)}(a)|$. Posons

$$U = \left\{ x \in F_a \,\middle|\, \sum_{0<|p|\leqslant|\alpha|} (1/p!)\, |(D^\alpha)^{(p)} m(x)|\, n^{2|p|} C^{|p|} \leqslant (1/4)\, |m^{(\alpha)}(x)| \right\}.$$

Si $x \in U$,

$$P(x) = \left\{ (Pm)^{(\alpha)}(x) - \sum_{0<|p|\leqslant|\alpha|} (1/p!)(D^\alpha)^{(p)} m(x)\, P^{(p)}(x) \right\} (m^{(\alpha)}(x))^{-1}.$$

Utilisant le lemme 1 et le lemme 3 avec $\epsilon = \frac{1}{8} |m^{(\alpha)}(a)|$ il vient

$$|P(x)| \leqslant 2C_0\, |m^{(\alpha)}(a)|^{-1}(n+1)^{2|\alpha|}\, \| Pm \| + \tfrac{1}{2} \| P \|.$$

Si $x \in \complement_{F_a} U$, nous avons alors

$$\sum_{0<|p|\leqslant|\alpha|} (1/p!)\, |(D^\alpha)^{(p)} m(x)|\, n^{2|p|} C^{|p|} > (1/8)\, |m^{(\alpha)}(a)|.$$

Posons $K = [4\, |\alpha|\, C_{N+|\alpha|-1}^{|\alpha|-1}]^{-1}$. Deux cas sont alors possibles.

Premier cas.

$$K\, |(D^\alpha)^{((0,0,\ldots,0,1))} m(x)|\, Cn^2 \geqslant \sum_{\substack{0<|p|\leqslant|\alpha| \\ p \neq (0,\ldots,0,1)}} (1/p!)\, |(D^\alpha)^{(p)} m(x)|\, n^{2|p|} C^{|p|}.$$

Alors d'une part $(K+1)\, |(D^\alpha)^{((0,0,\ldots,0,1))} m(x)|\, Cn^2 > \frac{1}{8} |m^{(\alpha)}(a)|$, et d'autre-part, pour p vérifiant $0 < |p| \leqslant |\alpha|$, $p \neq (0, 0,\ldots, 0, 1)$

$$\frac{(1/p!)\, |(D^\alpha)^{(p)} m(x)|\, n^{2|p|} C^{|p|}}{|(D^\alpha)^{((0,\ldots,0,1))} m(x)|\, Cn^2} \leqslant K.$$

On peut alors écrire

$$P(x) = \frac{(D^\alpha)^{((0,\ldots,0,1))}(Pm)(x) - \sum_{0<|q|\leqslant|\alpha|-1} (1/q!)(D^\alpha)^{(q+(0,\ldots,0,1))} m(x)\, P^{(q)}(x)}{(D^\alpha)^{((0,0,\ldots,0,1))} m(x)}.$$

Utilisant l'inégalité de Markov, les deux inégalités ci-dessus, le lemme 3 avec $\epsilon = |m^{(\alpha)}(a)| [32 |\alpha| (K+1)C]^{-1}$, nous obtenons

$$|P(x)| \leqslant 8CC_0 |\alpha| (K+1) |m^{(\alpha)}(a)|^{-1}(n+1)^{2|\alpha|} \| Pm \| + \tfrac{1}{4} \| P \| + K \| P \| |\alpha| C_{N+|\alpha|-1}^{|\alpha|-1}.$$

Donc $|P(x)| \leqslant 8CC_0 |\alpha| (K+1) |m^{(\alpha)}(a)|^{-1}(n+1)^{2|\alpha|} \| Pm \| + \frac{1}{2} \| P \|$.

2ème cas.

$$K |(D^\alpha)^{((0,\ldots,0,1))} m(x)| Cn^2 < \sum_{\substack{0<|p|\leqslant|\alpha| \\ p\neq(0,\ldots,0,1)}} (1/p!) |(D^\alpha)^{(p)} m(x)| n^{2|p|},$$

et alors

$$K[8(K+1)]^{-1} |f^{(\alpha)}(a)|$$

est également inférieur au second membre de l'inégalité précédente. Nous sommes donc ramenés à une situation analogue à la situation de départ ($x \in \complement_{F_a} U$) mais avec un terme en moins. On est conduit à une nouvelle alternative que l'on traite de facon identique. La réitération du procédé conduit à un nombre fini d'inégalités de la forme

$$|P(x)| \leqslant \mathrm{cte}(n+1)^{2|\alpha|} \| Pm \| + \tfrac{1}{2} \| P \|.$$

Il existe donc une constante C_a telle que pour tout $x \in F_a$

$$|P(x)| \leqslant C_a(n+1)^{2|\alpha|} \| Pm \| + \tfrac{1}{2} \| P \|.$$

La proposition résulte alors du fait qu'on peut recouvrir $\bar{\Omega}$ par un nombre fini de fermés du type F_a.

COROLLAIRE 1. *Soit $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ayant sur $\bar{\Omega}$ un ordre d'annulation d fini. Il existe une constante C_2 telle que pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ et pour tout α vérifiant $|\alpha| \leqslant d$ on ait*

$$\|(Pm)^{(\alpha)}\| \leqslant C_2(n+1)^{2d} \| Pm \|.$$

(*Ce corollaire résulte de la proposition* 1 *et du lemme* 3.)

LEMME 4. *Il existe $\beta \in \mathbb{N}$ et une constante positive L_1 tels que pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ et pour tout $p \geqslant 1$ on ait*

$$\| P \| \leqslant L_1(n+1)^\beta \| P \|_{p,1}.$$

(*Voir la démonstration dans* [1]).

LEMME 5. *Soit $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ayant sur $\bar{\Omega}$ un ordre d'annulation d fini. Il existe une constante C_3 telle que pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ on ait*

$$\| Pm \| \leqslant C_3(n+1)^\beta \| Pm \|_{p,1}.$$

Démonstration. On choisit la suite (A_k) comme dans le lemme 2. $\| Pm \| \leqslant \|(m - A_k)P\| + \| A_k P \|$, et l'on a d'après le lemme 4

$$\|(m - A_k)P\| \leqslant a_k \| P \| \qquad \text{et} \qquad \| A_k P \| \leqslant L_1(n+k+1)^\beta \| A_k P \|_{p,1},$$

$\| A_k P \| \leqslant L_1(n+k+1)^\beta [\|(m - A_k)P\|_{p,1} + \| Pm \|_{p,1}]$. Donc d'après la proposition 1

$$\| Pm \| \leqslant L_2(n+k+1)^{\beta+2d} a_k \| Pm \| + L_1(n+k+1)^\beta \| Pm \|_{p,1}.$$

On achève la démonstration en remarquant qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $L_2(2j + k_0 + 1)^{\beta+2d} a_{j+k_0} < \frac{1}{2}$ et en prenant $k = n + k_0$.

COROLLAIRE 2. *Soit $m \in C^\infty(\bar{\Omega})$, ayant sur $\bar{\Omega}$ un ordre d'annulation d fini. Il existe une constante C_4 telle que pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ et pour tout $p \geqslant 1$,*

$$\| P \| \leqslant C_4(n+1)^{\beta+2d} \| Pm \|_{p,1}.$$

(*Ce corollaire résulte de la proposition* 1 *et du lemme* 5.)

Fin de la démonstration du théorème 1. Il suffit d'après le lemme 1 de démontrer le théorème 1 pour $j = 0$. Or $\| Pm \|_{p,1} \leqslant \| P \|_{p,w}$. Donc le corollaire 2 nous donne le résultat avec $A = \operatorname{Sup}(C, C_4)$.

COROLLAIRE 3 (Inégalité de Markov généralisée). *Si Ω est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, si $w \in L^p(\Omega)$ et vérifie la propriété* (H) *du théorème* 1, *il existe deux constantes C_5 et θ telles que pour tout n et pour tout $P \in \mathscr{P}_n$ on ait, pour $i \in \{1, 2,..., N\}$,*

$$\| D_i P \|_{p,w} \leqslant C_5 n^\theta \| P \|_{p,w}.$$

Démonstration. Si $w \in L^p(\Omega)$ et si $P \in \mathscr{P}_n$, P et $D_i P$ appartiennent à $L_w{}^p(\Omega)$, et $\| D_i P \|_{p,w} \leqslant \| w \|_{p,1} \| D_i P \| \leqslant$ cte $n^2 \| P \|$. On achève en utilisant le théorème 1.

2. PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION POLYNÔMIALE DES FONCTIONS RÉGULIÈRES DE $L_w{}^p(\Omega)$

2.1. *Enoncé des Résultats*

PROPOSITION 2 (Propriétés des fonctions de $\mathfrak{a}_s$ et de $\mathfrak{q}$). *Si $f \in \mathfrak{q}$ (Resp. $\mathfrak{a}_s$) alors $(d_{L_w{}^p(\Omega)}(f, H_k))_{k \in \mathbb{N}} \in S$ (Resp. E_s).*

THÉORÈME 2 (Caractérisation de fonctions analytiques de $L_w{}^p(\Omega)$). *Si* w *vérifie la propriété* (H) *du théorème* 1, *pour* $f \in L_w{}^p(\Omega)$ *les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $f \in \mathfrak{a}_1$;

(ii) $(d_{L_w{}^p(\Omega)}(f, H_k))_{k\in\mathbb{N}} \in E_1$.

THÉORÈME 3 (Propriétés des fonctions C^∞ et du type Gevrey de $L_w{}^p(\Omega)$). *Si* w *vérifie la propriété* (H) *du théorème* 1, *et si pour* $f \in L_w{}^p(\Omega)$ *on a* $(d_{L_w{}^p(\Omega)}(f, H_k))_{k\in\mathbb{N}} \in S$ *(Resp.* E_s*) alors* $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ *(Resp.* $\mathfrak{A}_s(\bar{\Omega})$*). De plus dans* Ω *on peut écrire* $f = Q_1 f_1 + \cdots + Q_r f_r$ *avec pour tout* i, $f_i \in C^\infty(\Omega)$.

THÉORÈME 4 (Caractérisation des fonctions régulières de $L_w{}^p(\Omega)$). *Si* w *vérifie la propriété* (H) *du théorème* 1 *et si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée.*

(1) $\mathfrak{p}$ *est un idéal principal (donc en particulier si* $N = 1$ *ou si* $w \in L^p(\Omega)$*)*;

(2) $N = 2$.

Alors pour $f \in L_w{}^p(\Omega)$ *les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $f \in \mathfrak{q}$ *(Resp.* $\mathfrak{a}_s$*)*;

(ii) $(d_{L_w{}^p(\Omega)}(f, H_k))_{k\in\mathbb{N}} \in S$ *(Resp.* E_s*)*.

Remarque. Si $N = 1$, $\Omega =]-1, +1[$, $w(x) = e^{-x^{-2}}$, w ne vérifie pas (H). On montre que la conclusion du théorème 2 ne subsiste pas en vérifiant que $(d_{L_w{}^p(\Omega)}(x^{-2}, H_k))_{k\in\mathbb{N}} \in S$.

2.2. *Démonstration de la Proposition* 2

Supposons $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ (sinon la proposition est évidente). Si $f \in \mathfrak{q}$ (Resp. $\mathfrak{a}_s$), $f = Q_1 g_1 + \cdots + Q_r g_r$ où pour tout i, $g_i \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathfrak{A}_s(\bar{\Omega})$). D'après [1] il existe des suites $(R_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes telles que, pour $i \in \{1,..., r\}$, $(\| g_i - R_{ik} \|)_{k\in\mathbb{N}} \in S$ (Resp. E_s). On vérifie alors aisément que $(\| f - Q_1 R_{1k} - \cdots - Q_r R_{rk} \|_{p,w})_{k\in\mathbb{N}} \in S$ (Resp. E_s) donc que $(d_{L_w{}^p(\Omega)}(f, H_k))_{k\in\mathbb{N}} \in S$ (Resp. E_s).

2.3. *Démonstration des Théorèmes* 2 *et* 3

La partie directe du théorème 2 résulte de la proposition 2. Démontrons simultanément la partie réciproque du théorème 2 et le théorème 3. Si $\mathfrak{p} = \{0\}$ le résultat est immédiat. Supposons $\mathfrak{p} \neq \{0\}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit P_i un polynôme tel que $d_{L_w{}^p(\Omega)}(f, H_i) = \| f - P_i \|_{p,w}$. La série $P_0 + \sum_{i=0}^{\infty} (P_{i+1} - P_i)$ converge vers f dans $L_w{}^p(\Omega)$ et $(\| P_{i+1} - P_i \|_{p,w})_{i\in\mathbb{N}} \in S$ (Resp. E_s). Mais d'après le théorème 1, $\| P_{i+1} - P_i \| \leqslant A(i+2)^B \| P_{i+1} - P_i \|_{p,w}$ donc $(\| P_{i+1} - P_i \|)_{i\in\mathbb{N}} \in S$ (Resp. E_s), et la série ci-dessus converge aussi dans $L^\infty(\Omega)$ vers une fonction h continue et égale à f presque partout. Par ailleurs $\|f - P_i\| \leqslant \sum_i^\infty \| P_{j+1} - P_j \|$ donc $(d_{L^\infty(\Omega)}(f, \mathscr{P}_i))_{i\in\mathbb{N}} \in S$ (Resp. E_s) et, d'après [1], $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}_s(\bar{\Omega})$).

Fin de la démonstration du théorème 3. On peut démontrer de la même façon que $(\|f^{(j)} - P_i^{(j)}\|)_{i\in\mathbb{N}} \in S$. Remarquons que pour tout i, $P_i \in \mathfrak{q}$. Or, d'après un théorème de Malgrange (voir [12] ou [18]), l'idéal engendré par $Q_1, \ldots, Q_r$ dans $C^\infty(\Omega)$ est fermé dans $C^\infty(\Omega)$. On peut donc écrire $f = \sum_1^r Q_i f_i$ avec pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f_i \in C^\infty(\Omega)$.

Fin de la démonstration du théorème 2.

PROPOSITION 3 (Ce résultat m'a été communiqué par A. Douady). *Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Un idéal de type fini de $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}(V)$ est fermé dans $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}(V)$.*

Démonstration.

1ère étape.

LEMME 6. *Avec les notations usuelles en théorie des faisceaux, pour tout faisceau analytique cohérent $\mathscr{F}$ sur V on a $H^1(V, \mathscr{F}) = 0$.*

Pour la démonstration de ce lemme voir [5] et [8].
Si $g \in \mathcal{O}\!\!\mathcal{l}(V)$ on note g_x le germe de g au point x.

COROLLAIRE 4. *Soit $h_1, \ldots, h_r$ dans $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}(V)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *f appartient à l'idéal engendré par $h_1, \ldots, h_r$.*

(ii) *Pour tout x dans V, f_x appartient à l'idéal engendré par $h_{1x}, \ldots, h_{rx}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques sur V. Considérons le morphisme de faisceaux

$$\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}^r \to \mathcal{O}\!\!\mathcal{l}$$

$$(g_1, \ldots, g_r) \xrightarrow{\varphi} \sum_1^r g_i h_i .$$

Soit $\mathscr{R}$ le noyau de φ et $\mathscr{I}$ son image. A la suite exacte

$$0 \to \mathscr{R} \to \mathcal{O}\!\!\mathcal{l}^r \to \mathscr{I} \to 0.$$

On peut associer la suite exacte

$$0 \to H^0(V, \mathscr{R}) \to H^0(V, \mathcal{O}\!\!\mathcal{l}^r) \to H^0(V, \mathscr{I}) \to H^1(V, \mathscr{R}).$$

Mais $H^0(V, \mathcal{O}^r) = (\mathcal{O}(V))^r$, $H^0(V, \mathcal{I}) = \mathcal{I}(V)$ (c'est à dire l'ensemble des fonctions telles que pour tout x de V, $f_x \in (h_{1x}, ..., h_{rx})$) et $H^1(V, \mathcal{R}) = 0$ d'après le lemme 6. Donc l'application

$$\begin{gathered}(\mathcal{O}(V))^r \to \mathcal{O}(V)\\ (f_1, ..., f_r) \to \sum f_i h_i\end{gathered}$$

est surjective.

2ème étape. Le théorème de fermeture de Krull [4] permet de montrer le résultat suivant en remarquant que l'anneau des germes de fonctions analytiques en x est un anneau local noethérien.

LEMME 7. *Soit $x \in V$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, le jet d'ordre k de f au point x appartient à l'idéal engendré par les jets d'ordre k de $h_1, ..., h_r$ en x alors f_x appartient à l'idéal engendré par $h_{1x}, ..., h_{rx}$.*

La proposition 3 qui s'établit facilement pour les jets d'ordre k en un point, résulte alors du corollaire 4 et du lemme 7.

Puisque Ω est à bord lipschitzien il existe d'après l'inégalité de Bernstein et les résultats de [3] un voisinage V de $\bar{\Omega}$ tel que $(\| P_{i+1} - P_i \|_{L^\infty(V)})_{i\in\mathbb{N}} \in E_1$. La fonction $P_0 + \sum_0^\infty (P_{i+1} - P_i)$ appartient à l'idéal des fonctions analytiques de V engendré par $Q_1, ..., Q_r$ donc s'écrit $Q_1 f_1 + \cdots + Q_r f_r$ avec pour tout $i, f_i \in \mathcal{O}(V)$. On a donc $f = \sum Q_i f_i$ sur $\bar{\Omega}$ avec, pour tout $i, f_i \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$.

2.4. *Démonstration du Théorème* 4

Cas ou $\mathfrak{p}$ *est principal.* En reprenant les notations du paragraphe précédent on suppose $\mathfrak{p}$ engendré par Q et on note $P_n = QS_n$. Les polynômes S_n vérifient d'après la proposition 1 des majorations du même type que les polynômes P_n ; d'où les égalités (dans $L^\infty(\Omega)$)

$$\begin{aligned} f = P_0 + \sum_0^\infty (P_{i+1} - P_i) &= QS_0 + \sum_0^\infty Q(S_{i+1} - S_i)\\ &= Q\left[S_0 + \sum_0^\infty (S_{i+1} - S_i)\right].\end{aligned}$$

Donc $f = Qh$ où $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathcal{O}_s(\bar{\Omega})$).

Cas ou $N = 2$. On peut poser $Q_i = QR_i$ où les R_i sont des polynômes sans facteur commun. Les R_i engendrent l'idéal $\mathfrak{p}'$ des polynômes de $L^p_{wQ}(\Omega)$. $Q^p w^p$ est intégrable sur Ω sauf au voisinage d'un nombre fini de points que l'on notera $b_1, ..., b_\ell$ qui sont les zéros communs à tous les R_i sur $\bar{\Omega}$. En reprenant les notations du paragraphe 2.3, on pose $P_i = QS_i$. Comme ci-dessus on montre que $f = Qh$ avec $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathcal{O}_s(\bar{\Omega})$). Il reste donc à prouver que h qui appartient à $L^p_{Qw}(\Omega)$ est dans l'idéal $\mathfrak{q}'$ (Resp. $\mathfrak{a}_s'$) des fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathcal{O}\!\iota_s(\bar{\Omega})$) engendré par $R_1, \ldots, R_r$. L'inégalité de Lojaciewicz [10] appliquée à la fonction $R_1{}^k + \cdots + R_r{}^k$ où k est le plus petit entier pair tel que $k \geqslant p$ montre que, pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Il existe un entier q_i tel que pour tout couple d'entiers positifs (β_i, γ_i) vérifiant $\beta_i + \gamma_i \geqslant q_i$, la fonction $(x_1 - b_{i1})^{p\beta_i}(x_2 - b_{i2})^{p\gamma_i} Q^p w^p$ soit intégrable au voisinage de b_i. Il en résulte que, si pour tout i, $\beta_i + \gamma_i > q_i$ alors $\sum_{i=1}^{l}(x_1 - b_{i1})^{\beta_i}(x_2 - b_{i2})^{\gamma_i} \in L^p_{Qw}(\Omega)$. On peut alors montrer à l'aide de la formule de Taylor utilisée successivement aux points b_i et à l'ordre q_i que h peut s'écrire $h = U + \sum_{\text{finie}} T_i h_i$ où U est un polynôme, les T_i des éléments de $\mathfrak{p}'$ et les h_i des fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega})$ (Resp. $\mathcal{O}\!\iota_s(\bar{\Omega})$). Donc $T_i h_i \in \mathfrak{q}'$ (Resp. $\mathcal{O}\!\iota_s'$) et $U \in L^p_{Qw}(\Omega)$; par suite $U \in \mathfrak{p}'$ et $h \in \mathfrak{q}'$ (Resp. $\mathfrak{a}_s'$).

3. Approximation simultanée d'une fonction et de ses dérivées

On suppose dans toute la suite que $w \in L^p(\Omega)$. Soit $f \in C^s(\bar{\Omega})$ et $S_n \in \mathscr{P}_n$ tel que $\| f - S_n \|_{p,w} = d_{L^p_w(\Omega)}(f, \mathscr{P}_n)$. On se propose de démontrer que si w vérifie (H) la suite $(S_n^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f^{(r)}$ dans $L^\infty(\Omega)$, pourvu que $| r |$ ne soit pas trop grand. De nombreux auteurs (voir, par exemple, [6, 14–17]) ont démontré ce type de résultat, dans des cas particuliers, mais en calculant des constantes précises.

3.1. *Approximation d'une Fonction et de ses Dérivées dans $L^\infty(\Omega)$*

PROPOSITION 3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, soit $s \in \mathbb{N}$, et $f \in C^{2s}(\bar{\Omega})$. Il existe une constante positive K_0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathscr{P}_n$ vérifiant pour tout $r \in \mathbb{N}^N$ tel que $| r | < s - (N/4)$*

$$\| f^{(r)} - Q_n^{(r)} \| \leqslant K_0 n^{(1/2)-2s+2|r|}.$$

Démonstration. Ω est contenu dans un parallélépipède. Il suffit donc de démontrer cette proposition quand Ω est ce parallélépipède et par changement de variables quand $\Omega = \Pi = (]-1, +1[)^N$.

Notations. Soit $\{t_n\}$ la famille des polynômes de Tchébicheff normalisés. Posons $D = \sum_1^N (x_i^2 - 1) D_i^2 + x_i D_i$, $T = \prod_1^N (1 - x_i^2)^{-1/4}$, et pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $T_\alpha(x) = \prod_1^N t_{\alpha_i}(x_i)$.

On montre facilement que

* Les T_α forment une base orthonormale de $L_T{}^2(\Pi)$;
* Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\| T_\alpha \|_{L^\infty(\Pi)} = (2/\pi)^{(1/2)N}$;
* D est autoadjoint pour la structure hilbertienne de $L_T{}^2(\Pi)$;
* $DT_\alpha = (\sum_1^N \alpha_i^2)\, T_\alpha$.

Ordonnons les α par ordre de longueur (longueur de $\alpha = \sum \alpha_i$) et pour une même longueur par ordre lexicographique. Notons $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des T_α écrite dans l'ordre des α croissants. On vérifie aisément qu'il existe quatre constantes k_1, k_2, k_3, k_4, strictement positives telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$

* $k_1 i^{1/N} \leqslant$ degré de $T_i \leqslant k_2 i^{1/N}$;

* $DT_i = A_i T_i$ où A_i vérifie $k_3 i^{2/N} \leqslant A_i \leqslant k_4 i^{2/N}$.

Si $f \in C^{2s}(\overline{\Pi})$ on peut écrire d'après les remarques précédentes, $f = \sum_0^\infty a_i T_i$ dans $L_T{}^2(\Pi)$ avec

$$a_i = (f \mid T_i)_{L_T{}^2(\Pi)} = (D^s f \mid T_i)\, A_i^{-s} = b_i i^{-2s/N},$$

où (b_i) vérifie $\sum_0^\infty \mid b_i \mid^2 < \infty$.

Pour $\mid r \mid < s - (N/4)$ la série $\sum_0^\infty a_i T_i^{(r)}$ converge normalement vers $f^{(r)}$; en effet d'après le lemme 1, $\| T_i^{(r)} \| \leqslant \text{cte}\, i^{2|r|/N}$ et $\sum_0^\infty i^{(2|r|-2s)/N} \mid b_i \mid \leqslant (\sum_0^\infty \mid b_i \mid^2)^{1/2} (\sum_0^\infty i^{4(|r|-s)/N})^{1/2}$ de plus

$$\left\| f^{(r)} - \sum_0^k a_i T_i^{(r)} \right\|_{L^\infty(\Pi)} \leqslant \left(\sum_0^\infty \mid b_i \mid^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k+1}^\infty i^{4(|r|-s)/N} \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \text{Cte}\, k^{2(|r|-s)/N+(1/2)}.$$

Soit $\rho = C_{N+n}^n$ et $Q_n = \sum_0^\rho a_i T_i$. Alors $d^\circ Q_n \leqslant n$ et d'après l'inégalité précédente: $\| f^{(r)} - Q_n^{(r)} \| \leqslant \text{Cte}\, n^{2|r|-2s+(1/2)}$.

3.2. *Approximation dans $L_w{}^p$ et dans L^∞*

THÉORÈME 5. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord lipschitzien, w un poids vérifiant la propriété* (H) *du théorème* 1 *et appartenant à $L^p(\Omega)$. Soit $s \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{2s}(\overline{\Omega})$. Il existe une constante K telle que si $S_n \in \mathscr{P}_n$ et vérifie $\| f - S_n \|_{p,w} = d_{L_w{}^p(\Omega)}(f, \mathscr{P}_n)$, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}^N$ satisfaisant à $\mid r \mid < s - (N/4)$ on ait*

$$\| f^{(r)} - S_n^{(r)} \| \leqslant K n^{(1/2)+\beta+2d+2|r|-2s}, \qquad n \geqslant 1, \qquad \beta = \text{cte du th. 1}.$$

Démonstration. Soit (Q_n) la suite de polynômes exhibée dans la proposition 3

$$\| f^{(r)} - S_n^{(r)} \| \leqslant \| f^{(r)} - Q_n^{(r)} \| + \| Q_n^{(r)} - S_n^{(r)} \|.$$

D'après le lemme 1, pour $\mid r \mid < s - (N/4)$, on a

$$\| Q_n^{(r)} - S_n^{(r)} \| \leqslant \text{Cte}\, n^{2|r|} \| Q_n - S_n \|.$$

Mais d'après le théorème 1,

$$\| Q_n - S_n \| \leqslant C n^{\beta+2d} \| Q_n - S_n \|_{p,w}.$$

Or

$$\| Q_n - S_n \|_{p,w} \leqslant \| Q_n - f \|_{p,w} + \| f - S_n \|_{p,w} \leqslant 2 \| f - Q_n \|_{p,w} .$$

Soit

$$\| Q_n - S_n \|_{p,w} \leqslant 2 \| Q_n - f \| \cdot \| w \|_{p,1} .$$

En reprenant les majorations de la proposition 3, il vient

$$\begin{aligned} \| f^{(r)} - S_n^{(r)} \| &\leqslant K_0 n^{(1/2)+2|r|-2s} + \mathrm{Cte}\, n^{2|r|} n^{\beta+2d} K_0 n^{(1/2)-2s} \\ &\leqslant K n^{(1/2)+\beta+2d+2|r|-2s}. \end{aligned}$$

3.3. *Approximation Polynômiale et Régularité*

PROPOSITION 4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord lipschitzien, w un poids vérifiant la propriété* (H) *du théorème* 1 *et appartenant à $L^p(\Omega)$. S'il existe deux constantes positives M et γ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\gamma d_{L_w^p(\Omega)}(f, \mathscr{P}_n) \leqslant M$, alors, $f \in C^j(\bar{\Omega})$ ou j est le plus grand entier vérifiant $j < \frac{1}{2}(\gamma - 1 - \beta - 2d)$.*

Démonstration. Dans $L_w^p(\Omega) f = S_0 + \sum_0^\infty S_{i+1} - S_i = \sum_0^\infty U_i$ en posant $U_0 = S_0$, $U_{i+1} = S_{i+1} - S_i$ $(i > 0)$. De plus $n^\gamma \| U_n \|_{p,w} \leqslant 2M$. Donc d'après le théorème 1,

$$\| U_n^{(r)} \| \leqslant C n^{\beta+2d+2|r|} \| U_n \|_{p,w} \leqslant 2MC n^{\beta+2d+2|r|-\gamma}.$$

Les séries $\sum_0^\infty U^{(r)}$ convergent donc normalement pour tout les r tels que $\beta + 2d + 2 | r | - \gamma < -1$. Il en résulte que f est de classe C^j où j est le plus grand entier tel que $j < \frac{1}{2}(\gamma - 1 - \beta - 2d)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. S. BAOUENDI ET C. GOULAOUIC, Approximation polynômiale des fonctions C^∞ et analytiques, *Ann. Inst. Fourier* **21** (1971), 149–174.
2. M. S. BAOUENDI ET C. GOULAOUIC, Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés, *J. Functional Analysis* **8** (1972), 208–248.
3. M. S. BAOUENDI ET C. GOULAOUIC, Approximation of analytic functions on compact sets and Bernstein's inequality, *Trans. Amer. Math. Soc.* **189** (1974), 251–261.
4. N. BOURBAKI, "Algèbre commutative," Hermann, Paris, 1967.
5. H. CARTAN, Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), 77–99.
6. G. FREUD, On expansions in orthogonal polynomials, *Studia Sci. Math. Hungar.* **6** (1971), 367.
7. P. GOETGHELUCK, Caractérisation de sous-espaces de fonctions C^∞ dans certains espaces L^2 avec poids, *C.R. Acad. Sci. Paris série A* **276** (1973), 917–919.
8. H. GRAUERT, On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, *Ann. of Math.* **68** 2 (1958), 460–471.

9. M. Guillemot-Teissier, Développement de distributions en série de fonctions orthogonales, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **25** (1972), 519–573.
10. S. Lojaciewicz, Sur le problème de la division, *Studia Math.* **18** (1959), 87–136.
11. G. G. Lorentz, "Approximation of functions," Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1966.
12. B. Malgrange, "Ideals of differentiable functions," Oxford Univ. Press, London, 1966.
13. B. S. Mittiagin, Approximate dimension and bases in nuclear spaces, *Uspeki mat. Nauk.* **16** (1961), 63–132.
14. J. Prasad, Remarks on a theorem of P. K. Suetin, *Czechoslovak. Math. J.* **21** (1971), 349–354.
15. J. Prasad, On an approximation of a function and its derivaties, *Pub. Inst. Math. Beograd* **14**, 28 (1972), 129–132.
16. R. B. Saxena, Expansions of continuous differentiable functions in Fourier–Legendre series, *Canad. J. Math.* **19** (1967), 823–827.
17. P. K. Suetin, Representation des fonctions continues et différentiables en séries de polynômes de Legendre, *Dokl. Akad. Nauk USSR* **158** (1964), 1275–1277.
18. J. C. Tougeron, "Idéaux de fonctions différentiables," Springer, Berlin, 1972.
19. H. Triebel, Erzeugung des nuklearen localconvexen Raümes $C^\infty(\bar{\Omega})$ durch einen elliptischen Differentialoperatoren zweiter ordnung, *Math. Ann.* **177** (1968), 247–264.
20. M. Zerner, Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables, *C.R. Acad. Sci. Paris Série A* **268** (1969), 218–220.